Démonstrations – Réductions géométriques

Propriété : (Dimension des sev en somme directe)

Soit un -ev de dimension finie. Soient des sev de . On a :

La somme est directe

Démonstration :

Considérons

On sait que est linéaire.

On a :

est directe

est bijective

est injective (car par construction, est surjective)

Propriété : (Inter & Union stables)

Soient et deux sev de stables par . Alors et sont aussi stables par .

Démonstration :

* Soit , tel que

Alors

Donc est stable par .

* De même, et

Donc et

Donc

Propriété : (Stabilité des images et noyaux)

Soient , tels que . Alors et sont stables par .

Démonstration :

* Soit

Alors

D’où

* Soit , montrons que .

Or

Donc .

Théorème :

Le polynôme caractéristique de a pour coefficient dominant et est de degré . Il possède les coefficients suivants :

Démonstration :

Notons , alors

Alors

Soit en tant que produit de polynômes de degré au plus 1, donc .

* Si ,

Alors avec , tel que et donc

Et de degré au plus (car le produit contient au moins deux polynômes constants)

* Si ,

Alors , . Ainsi :

, avec

De plus ,

Donc ,

Enfin le coefficient constant de vaut

Théorème : Soit . On a équivalence entre :

1. est valeur de propre de
2. est racine de

Démonstration :

On a

n’est pas inversible

Or

Ainsi

Propriété : Soient , 2 matrices semblables. Alors

Démonstration : Comme et sont semblables,

Donc

Or

Donc

Théorème : Soit et un sev de , , stable par , alors le polynôme caractéristique de l’endomorphisme induit par sur divise le polynôme caractéristique de , ie :

Démonstration :

Puisque est stable par , on complète une base de en une base de ,

Où

D’où

Or , donc .